2019-2020 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI FEN-EDEB. FAK. MAT. BÖL. MAT 101 ANALİZ I DERSİ 2.QUIZ SORULARI

ADI-SOYADI: 13.12.2019

NUMARASI:

İMZA:

Uyarılar:	Soru No		Puan
• Sınav süresi 40 dakikadır. • İlk 30 dakika sınav salonunu terk etmeyiniz. • Sınav süresince mobil telefonlarınızı kapalı tutunuz. • Ders notlarını içeren herhangi bir aracın sınav süresince kullanılması yasaktır. • Sınavda 3 soru olup, her soru 35 puan değerindedir, toplam 105 puandır. • Her soruyu altındaki boşluğa çözünüz. • Cevaplamaya istediğiniz sorudan başlayabilirsiniz. • Tam puan almak için yaptığınız işlemleri sınav kağıdında belirtmeniz gerekmektedir. • Başarılar… Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. İlker ERYILMAZ	1		
	2	(a)	
		(b)	
	3	(a)	
		(b)	
	Toplam		

SORULAR

1) Stolz teoremini ifade ediniz ve $a_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{11n^2}$ olmak üzere (a_n) dizisinin limitini bulunuz.

Stolz teoremi: $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ iki dizi, (y_n) artan, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L$ limiti mevcut ise o zaman

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = L$ dir.

$x_n = 1+2+\dots+n$ ve $y_n = 11n^2$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^2 < (n+1)^2$

olduğundan (y_n) dizisi artandır. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} 11n^2 = \infty$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\dots+n) - (1+2+\dots+(n-1))}{11n^2 - 11(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{11(2n-1)} = \frac{1}{22}$$

olduğundan Stolz teoremi gereği $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\dots+n}{11n^2} = \dfrac{1}{22}$ dir.

2) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{n!} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$0 < \frac{7^n}{n!} = \frac{\overbrace{7.7\dots7}^{n \text{ tane}}}{1.2\dots n} = \frac{7^{13}}{13!} \cdot \frac{\overbrace{7.7\dots7}^{n-13 \text{ tane}}}{14.15\dots n} = \frac{7^{13}}{13!} \cdot \overbrace{\underbrace{\left(\frac{7}{14}\right)}_{=\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{7}{15}\right)}_{<\frac{1}{2}} \cdots \underbrace{\left(\frac{7}{n}\right)}_{<\frac{1}{2}}}^{n-13 \text{ tane}}$$

$$< \frac{7^{13}}{13!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-13} = \frac{7^{13}}{13!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-13} = \frac{7^{13}}{13!} 2^{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

olduğundan $0 < \dfrac{7^n}{n!} < \underbrace{\dfrac{14^{13}}{13!}}_{\text{sabit}} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ dir. $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

olduğundan sıkıştırma teoremi gereği $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{n!} = 0$ dır.

2) b) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(n^2+1\right)$ limitinin değerini bulunuz.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^2+1>0$ olduğundan $\operatorname{sgn}(n^2+1) = 1$ dir.

Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(n^2+1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ elde edilir.

3) (a_n) ve $(-a_n)$ dizileri verilmiştir. Aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

a) (a_n) artan dizi ise $(-a_n)$ azalan dizidir.

(a_n) artan dizi olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$ dir.
Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-a_{n+1} \leq -a_n$ yazılır. Bu ise $(-a_n)$ dizisinin azalan dizi olduğunu gösterir.

b) $(-a_n)$ dizisi üstten sınırlı ise (a_n) dizisi alttan sınırlıdır.

$(-a_n)$ dizisi üstten sınırlı olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-a_n \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq -M$ yazılır. Bu ise (a_n) dizisinin $-M \in \mathbb{R}$ sayısı ile alttan sınırlı olduğunu gösterir.